Логическо програмиране (упражнения)

05.10.2018

<u>Опр.</u> (Терм/израз) Нека Var е изброимо множество, Func е множество от функционални символи, Pred е множество от релации (над Var) и Const е множество от константи (нулместен функционален символ). Термове са:

1) Променливи (Var)
2) Константи
3) Ако f е n-местен функционален символ, то $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм.

Термове
- 1
- $1+1$
- $x+1$
- $f(x)$
- $f(f(1))$

<u>Опр.</u> (Формула)

1) Атомарни
- $\tau_1 = \tau_2$
- Нека p е n-местен предикатен символ и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове. Тогава $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е формула

2) Нека φ и ψ са формули, а $x \in Var$. Тогава $\neg\varphi$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\exists x \varphi$, $\forall x \varphi$ са термове

формули
- $1+1=2$
- $1+1<2$

<u>Опр.</u> (Структура)

$A = (\mathcal{U}, I)$ (записваме $\mathcal{U} = |A|$)

$\mathcal{U} \neq \emptyset$, I → интерпретация

$I(c) \in \mathcal{U}$, където $c \in Const$

Ако f е n-местен функционален символ, то $I(f): \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$

Ако p е p-местен предикатен символ, то $I(p) \subseteq \mathcal{U}^n$

$V: Var \to |A|$

оценки

Стойност на терм ($\|\tau\|_A^v$)

$\|c\|_A^v := c^A$, $c \in Const$

$\|x\|_A^v := v(x)$, $v : Var \to \mathcal{U}$

$\|f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|_A^v := f^A(\|\tau_1\|_A^v, \ldots, \|\tau_n\|_A^v)$

$A \models_v \tau_1 = \tau_2$

iff $\|\tau_1\|_A^v = \|\tau_2\|_A^v$

$A \models_v p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

iff $(\|\tau_1\|_A^v, \|\tau_2\|_A^v, \ldots, \|\tau_n\|_A^v) \in p^A$

$A \models_v \neg\varphi$ iff $A \not\models_v \varphi$

($\|\varphi\|_A^v \neq \mathcal{U}$)

$A \models_v \varphi \& \psi$ iff $A \models_v \varphi$ и $A \models_v \psi$

$A \models_v \varphi \vee \psi$ iff $A \models_v \varphi$ или $A \models_v \psi$

$A \models_v \varphi \Rightarrow \psi$ iff $A \models_v \neg\varphi$ или $A \models_v \psi$

$A \models_v \varphi \Leftrightarrow \psi$ iff $\|\varphi\|_A^v = \|\psi\|_A^v$

$A \models_v \forall x \varphi$ iff за всяко $a \in |A|$, $A \models_{v_a^x} \varphi$ $\longrightarrow$ $v_a^x(y) = \begin{cases} v(y), \text{ако } y \neq x \\ a, \text{ако } y = x \end{cases}$

модифицирана оценка

$A \models_v \exists x \varphi$ iff съществува $a \in |A|$, $A \models_{v_a^x} \varphi$

$Var^{free}(\varphi) \subseteq Var$

- променливи, които не са под действието на квантор от φ.

<u>Пр. 1</u> $\forall x \exists y\, p(x) \Rightarrow q(x, y)$

свободни са, тъй като кванторите имат по-висок приоритет от импликацията

$\exists y(\forall x\, p(x) \Rightarrow q(x, y))$

свободна променлива

Нека $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ $\qquad a_1, \dots, a_n \in |A|$

iff

Същ. оценка v, $A \models_{v^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}} \varphi$

<u>Пр.2</u> $(\mathbb{N}, +)$; $Var^{free}(\varphi) = \{x\}$

$\underbrace{x + x = x}_{\varphi}$

$A \models \varphi[0]$

$A \not\models \varphi[1]$

$\{(a_1, \dots, a_n) \mid A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$ - множество, определено от φ

<u>Пр.3</u> $(\mathbb{N}, +)$;

$\overbrace{x + x = x}^{\varphi_0}$ определя $\{0\}$

$\overbrace{\exists z (x + z = y)}^{\varphi_\le}$ определя релацията $x \le y$

$\forall z (x \le z \vee z = 0) \,\&\, x \ne 0$ определя $\{1\}$

iff

$\underbrace{\forall z (\varphi_\le(x, z) \vee \varphi_0(z)) \,\&\, \neg \varphi_0(z)}_{\varphi_1}$

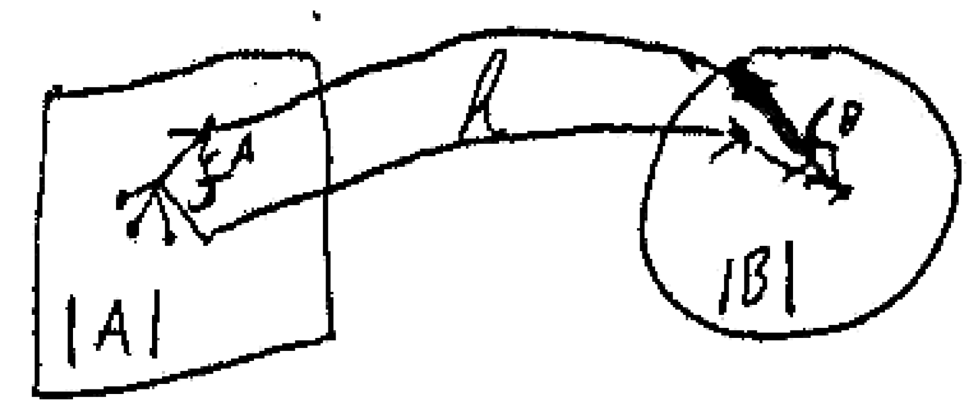
$\varphi_2 := \exists x (\varphi_1(x) \,\&\, y = x + x)$

<u>Зад.1</u> (дом.) Да се определи „<" в $(\mathbb{N}, +)$

<u>Зад.2</u> (дом.) Да се определят простите числа в $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

15.10.2018

<u>Опр.</u> (Хомоморфизъм) Нека A и B са структури. Изображението $h: |A| \to |B|$, удовлетворяващо



* $h(f^A(a_1,\dots,a_n)) = f^B(h(a_1),\dots,h(a_n))$

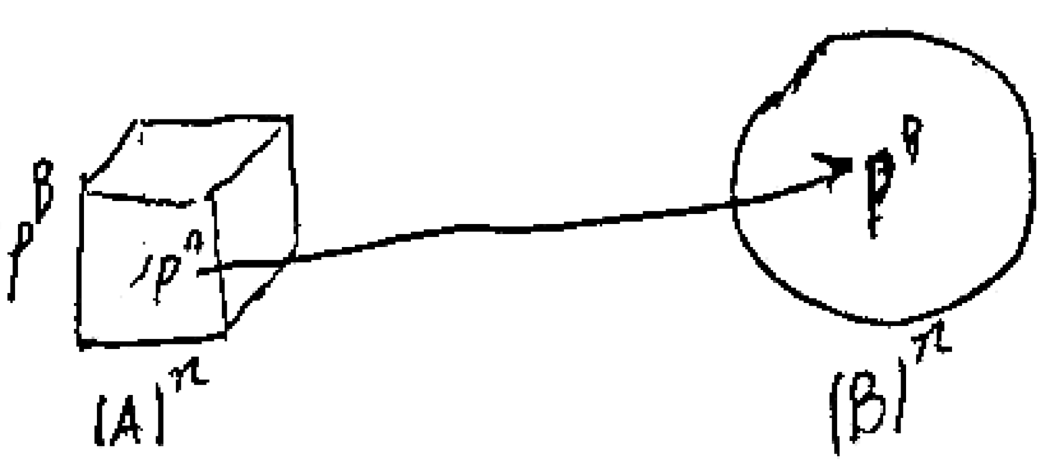
функция

$h(c^A) = c^B$

константи

* $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in p^A$ iff $\langle h(a_1),\dots,h(a_n)\rangle \in p^B$

предикат



се нарича <u>хомоморфизъм</u>. Ако h е биекция, h се нарича <u>изоморфизъм</u>. Ако h е изоморфизъм и $A=B$, то h се нар. <u>автоморфизъм</u>.

<u>Т-ма 1</u> Нека $R \subseteq |A|^n$ е определимо, а h е автоморфизъм, тогава $(a_1,\dots,a_n) \in R$ iff $(h(a_1),\dots,h(a_n)) \in R$

<u>Пр.1</u> $(\mathbb{Z},+)$

$\varphi_0(x) := x+x=x$ определя $\{0\}$

$h(x) = -x$ е автоморфизъм и $h(\{n\}) = \{n\}$ iff $n=0$.

Следователно $\{0\}$ е единственият определим синглтон

<u>Пр.2</u> $(\mathbb{N},+,\cdot)$

Знаем как да определим $\{n\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$

$h(\{n\}) = \{n\}$ се удовлетворява от $h(x)=x$, който е единственият автоморфизъм

Подмножествата на естествените числа са неизброимо много, а формулите са изброимо много, следователно има неопределими множества

<u>Зад.1</u> $(\mathbb{R}, \cdot)$

$\{0\}$ се определя от $\forall y(x y = x) =: \varphi_0(x)$

$\{1\}$ — " — $\forall y(x y = y) =: \varphi_1(x)$

$\{-1\}$ — " — $\exists y(x \cdot x = y \,\&\, \varphi_1(y)) \,\&\, \neg\varphi_1(x) =: \varphi_{-1}(x)$

$h_1(x) = x^3$ е автоморфизъм, чиито фиксирани точки са $\{0, 1, -1\}$

$\Rightarrow$ само $\{0\}, \{1\}, \{-1\}$ са определими

$h_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ е автоморфизъм, чиито фиксирани точки са

$\{0, 1, -1\}$. В $(\mathbb{Q}, \cdot)$ h_2 има същите фиксирани точки $\Rightarrow$ в $(\mathbb{Q}, \cdot)$ само $\{0\}, \{1\}, \{-1\}$ са определими.

<u>Зад. 2</u> (дом.) $(\mathbb{Q}, 0, 1, <)$

Определимо ли е множеството $\{\frac{1}{2}\}$?

<u>Зад.3</u> $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\{n\}$ е определимо за всяко $n \in \mathbb{Z}$ (чрез събиране с 1 или -1)

$\mathbb{N}$ е определимо с $\varphi_{\mathbb{N}}(x) := \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 (x = y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4)$

(използваме теоремата „всяко $n \in \mathbb{N}$ е представимо като сумата на квадратите на 4 естествени числа".

Простите числа са определими чрез $\forall x \forall y(x \cdot y = z \Rightarrow x = z \vee y = z) \,\&\, \neg z . z = z$

22.10.2018

Зад.1 $\langle A \rangle = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$(a,b,c) \in p$ iff $a \cap b = c$
единствен предикат

а) Да се определят чрез p множествата

$$\underbrace{\{\emptyset\}}_{(1)}, \underbrace{\{\mathbb{N}\}}_{(2)}, \underbrace{\{(a,b) \mid a \subseteq b\}}_{(3)}, \underbrace{\{(a,b,c) \mid a \cup b = c\}}_{(4)}$$

б) Не са определими други синглетони освен (1) и (2)

Решение

(а) (1): $\varphi_{(1)}(a) := \forall b\, p(a,b,a)$

Нека $a = \emptyset$. $a \cap b = \emptyset = a \overset{\text{следователно}}{\Rightarrow} \varphi_{(1)}(\emptyset) = И$

Обратно, нека $b = \emptyset$. Тогава $a \cap b = a$ и $a \cap b = \emptyset$ $\overset{\text{които влекат}}{\Rightarrow}$ $a = \emptyset$.

(2): $\varphi_{(2)}(a) := \forall b\, p(a,b,b)$

Нека $a = \mathbb{N}$. $a \cap b = b \overset{\text{след.}}{\Rightarrow} \varphi_{(2)}(\mathbb{N}) = И$

Обратно, нека $b = \mathbb{N}$. Тогава $a \cap b = b$ влече $a = \mathbb{N}$.

(3): $\varphi_{(3)}(a,b) := p(a,b,a)$

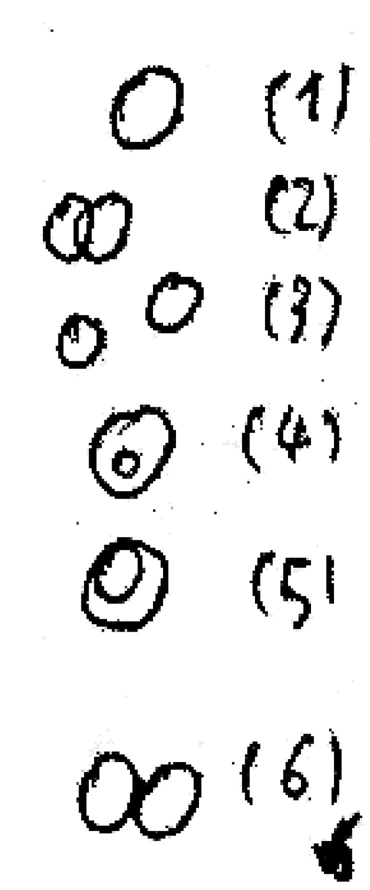
(4) $\varphi_{(4)}(a,b,c) := \varphi_{(3)}(a,c) \,\&\, \varphi_{(3)}(b,c) \,\&\, \forall d(\varphi_{(3)}(a,d) \,\&\, \varphi_{(3)}(b,d) \Rightarrow \varphi_{(3)}(c,d))$

(б) $h : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X \mapsto \{g_a^b(x) : x \in X\} \end{cases}$, където $g_a^b(x) = \begin{cases} a, & x = b \\ b, & x = a \\ x, & x \notin \{a,b\} \end{cases}$,

е автоморфизъм, тъй като е биекция ($h \circ h$ е идентитета) и $A \cap B = C \Rightarrow h(A) \cap h(B) = h(C)$. Единствените неподвижни точки на h са $\emptyset$ и $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ не са определими други синглетони.

Зад.2 $\langle A \rangle = \{$затворени непразни кръгове в равнината$\}$.

$(a,b) \in p$ iff $a \cap b = \emptyset$ (т.е., избираме (3) за базов предикат). Определете (1), (2), (4)-(6)



Решение $\varphi_{\subseteq}(x,y) := \forall z(p(z,x) \Rightarrow p(z,y))$

(1): $\varphi_{(1)}(x,y) := \forall z(p(z,x) \Leftrightarrow p(z,y))$ 0.

(2): $\varphi_{(2)}(x,y) := \exists z(\varphi_{\subseteq}(z,x) \& \varphi_{\subseteq}(z,y)) \& \exists z(\varphi_{\subseteq}(z,x) \& \neg\varphi_{\subseteq}(z,y)) \&$ ∞

$\& \exists z(\neg\varphi_{\subseteq}(z,x) \& \varphi_{\subseteq}(z,y))$

(6) $\varphi_{(6)}(x,y) := \neg\exists z(\varphi_{\subseteq}(z,x) \& \varphi_{\subseteq}(z,y)) \& \neg\varphi_{(1)}(x,y)$ ∞

(5) $\varphi_{(5)}(x,y) := \varphi_{\subseteq}(x,y) \& \exists z(\varphi_{(6)}(z,x) \& \varphi_{(6)}(z,y)) \& \neg\varphi_{(1)}(x,y)$ 0

(4) $\varphi_{(4)}(x,y) := \varphi_{\subseteq}(x,y) \& \neg\varphi_{1}(x,y) \& \neg\varphi_{5}(x,y)$ 0

Зад. 3 $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$

Определимо ли е $\{\frac{1}{2}\}$?

Решение

$h(x) = x^3$ е автоморфизъм и запазва $<, 0, 1$

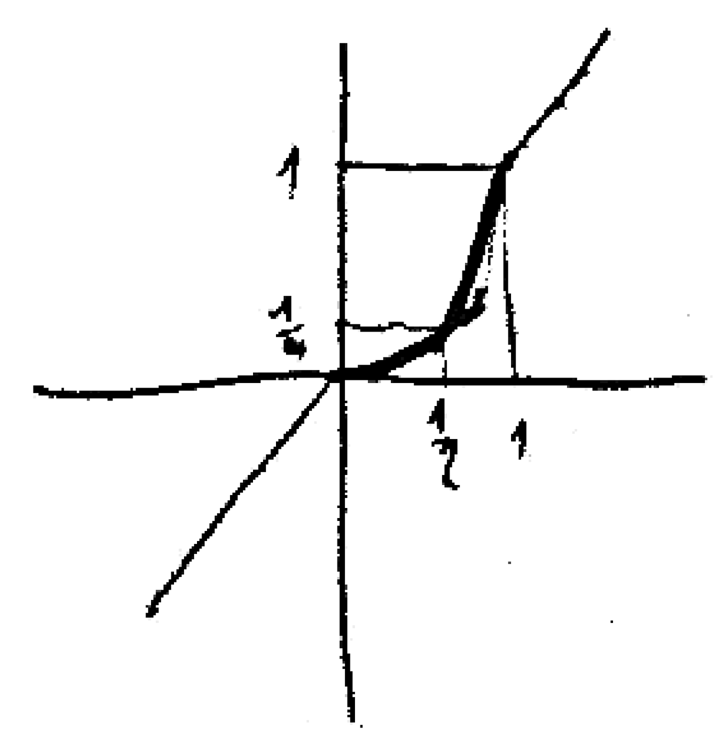
Но $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \{\frac{1}{2}\}$ не е определимо

Зад. 4 $(\mathbb{Q}, <, 0, 1)$

Определимо ли е $\{\frac{1}{2}\}$?

Решение

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2x, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



$h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$.

Зад. 5 $(\mathbb{N}, p)$

$(a, b, c) \in p$ iff $ab + 1 = c^2$

Да се определят $\{n\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$

Решение

$\varphi_{(0,1)}(a,c) = \forall b\, p(a,b,c)$

$\varphi_0(a) = \exists c\, \varphi_{(0,1)}(a,c)$

$\varphi_1(c) = \exists a\, \varphi_{(0,1)}(a,c)$

Алтернативно, $\varphi_{(0,1)}(a,c) = p(a,a,c)$.

$a^2+1=c^2$

$c > a$, следователно $c^2 \geq (a+1)^2 \geq a^2+1$.

Тогава $c^2 = a^2 + \underbrace{2a}_{0} + 1 = a^2+1$.

За да определим $\{2\}$, разглеждаме уравнението спрямо a и b.

$ab + 1 = \underbrace{c}_{2}{}^2$

$ab = (c-1)(c+1) = (2-1)(2+1) = 3$, просто число

$\varphi_2(c) = \forall a \forall b (p(a,b,c) \Rightarrow \varphi_1(a) \vee \varphi_1(b))\ \&\ \exists a \exists b\, p(a,b,c)$

$\varphi_n(b) = \exists a \exists c (p(a,b,c)\ \&\ \varphi_{n-1}(a)\ \&\ \varphi_{n+1}(c))$

29.10.2018

Зад. 1 $(\mathbb{N}, \cdot)$

Кои синглетони са определими?

Решение $\varphi_0(y) = \forall x(xy=y)$

$\varphi_1(y) = \forall x(xy=x)$

Няма други определими синглетони, тъй като

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \dots$ – разлагане на степени на прости множители

$h(n) = p_1^{\alpha_2} p_2^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \dots$

автоморфизъм, тъй като $h(a\cdot b) = h(a)h(b)$ и h е биекция

$h(0)=0$, $h(1)=1$, $h(n)\neq n$ за $n>1$ при подходящ избор на p_1 и p_2 (т.е. ако $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ в разлагането на n).

Зад. 2 $(\mathbb{N}, p^{A})$

$(a,b,c)\in p^{A}$ iff $a^5 b^4 = c$

Кои синглетони са определими?

Решение

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

$b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$

$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ $\quad 5\alpha_i + 4\beta_i = \gamma_i$ за всяко $i = 1, \dots, k$, т.е. h от зад.1 са автоморфизми и тук.

$a^5 b^4 = c$ iff

$\varphi_0(a) = \forall b\, p(a,b,a)$

$\varphi_1(a) = p(a,a,a) \,\&\, \neg\varphi_0(a)$

$\{n\}$ не е определимо за $n>1$.

Зад. 3 $(\mathbb{N}, p^*)$

$(a,b)\in p^*$ iff $a+b \geq 3$

Да се определят $\{0\}, \{1\}$

Решение $\varphi_{0,2}(a,b) = \neg p(a,b) \,\&\, p(a,a)$

$\varphi_0(b) = \exists a\, \varphi_{0,2}(a,b)$

$\varphi_2(a) = \exists b\, \varphi_{0,2}(a,b)$

$\varphi_1(a) = \neg p(a,a) \,\&\, \neg\varphi_0(a)$

Зад.4 φ определя A

ψ определя B

Как да определим $A \cap B$

Решение

$\theta_{A \cap B} = \varphi \,\&\, \psi$ ако $Var\,\varphi = Var\,\psi$.

Ако $\{x\} = Var\,\varphi \setminus Var\,\psi$,

$\{y\} = Var\,\psi \setminus Var\,\varphi$,

$v(x) \in A$

$v(y) \in B$,

тогава $\varphi \,\&\, \psi$ определя $A \times B$

Зад.5 $(\mathbb{N}^+, p^*)$

$(a,b,c) \in p^*$ iff $a^b = c$

Да се определи $\{1\}$ и $\{(a,b) \mid a < b\}$

Решение

$\varphi_1(a) = \forall b\, p(a,b,a)$

$\varphi_<(a,b) = ?$

Ще използваме следните помощни формули

$\forall a\, \exists x\, \exists y\, (p(a,b,x) \,\&\, p(x,c,y) \,\&\, p(a,d,y)) =: \varphi_\cdot(b,c,d)$

$b \cdot c = d$

$\varphi_+(b,c,d) = \forall a\, \exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(a,b,x) \,\&\, p(a,c,y) \,\&\, \varphi_\cdot(x,y,z) \,\&\, \varphi_\cdot(a,d,z))$

$b + c = d$

$\varphi_<(a,b) = \exists x\, \varphi_+(a,x,b)$

Зад. 6 $|A| = \{(V,E) : V \subseteq \mathbb{N},\ E \subseteq V \times V,\ (V,E)$ е (безкореново) дърво$\}$

$sub(T_1, T_2) := V(T_1) \subseteq V(T_2)$ и $E(T_1) \subseteq E(T_2)$

Зададено е тъждествено равенство

Да се определят:

(а) Празното дърво $\{\emptyset, \emptyset\}$

(б) $triv(T)$ (дървета с един връх и без ребра)

(в) $edge(T,E)$

(г) $leaf(T,L)$

Решение:

(а) $empty(T) := \forall T_1\, sub(T, T_1)$

(б) $triv(T) := \forall T_1 (sub(T_1, T) \Rightarrow (empty(T_1) \vee T = T_1)) \ \& \ \neg empty(T)$

(в) $edge(T,E) := \forall T_1 (sub(T_1, E) \Rightarrow (empty(T_1) \vee triv(T_1) \vee T_1 = E)) \ \&$
$\& \ \neg empty(E) \ \& \ \neg triv(E)$

(г) $leaf(T,L) := triv(L) \ \& \ sub(L,T) \ \& \ \forall T_1 (sub(L, T_1) \Rightarrow (L = T_1 \vee \exists T_2 (edge(T_2, T_1) \ \& \ sub(L, T_2) \ \& \ \forall T_3 (edge(T_3, T_1) \ \& \ sub(L, T_3) \Rightarrow T_2 = T_3))))$

т.е. L е тривиално поддърво на T и всяко наддърво на L е или $= L$, или има единствено поддърво, което е ребро и съдържа L.

05.11.2018

Зад. 1 $(\mathbb{N}, S^+)$

$(a,b,c) \in S^+$ iff $a + b = c$

Да се определи $\{(a,b) : 3 | (a-b)\}$

Решение:

$a = 3k + b$

$\varphi_{3k}(x) = \exists y \exists z (S^+(y,y,z) \& S^+(z,y,x))$

$\varphi_1(a,b) = \exists x (\varphi_{3k}(x) \& S^+(b,x,a))$

$\varphi(a,b) = \varphi_1(a,b) \vee \varphi_1(b,a)$

Зад. 2 $(\mathbb{Z}, p^A)$

$(n,k,m,l) \in p^A$ iff $n + k = m \cdot l$

Да се определят

(а) $\{0\}$

(б) $\{1\}$

(в) $\{(n,k,m) \mid n + k = m\}$

Решение:

$\varphi_a(a) = \forall b\, p^A(a,a,a,b)$

$\varphi_б(a) = \exists d (\varphi_a(d) \& p^A(d,a,a,a))$

$\varphi_в(a,b,c) = \exists d (\varphi_б(d) \& p^A(a,b,c,d))$

Зад. 3 $(\mathbb{Z}, p)$

$(a,b,c) \in p^A$ iff $a^4 + b^6 = c$

Кои от множествата са определими?

$\{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{7\}$

Решение:

$\varphi_0(a) = p(a,a,a)$

$\varphi_1(a) = \exists b (\varphi_0(b) \& p(b,a,a))$

$\varphi_{-1}(a) = \exists b \exists c (\varphi_0(b) \& \varphi_1(c) \& p(a,b,c)) \& \neg\varphi_1(a)$

$|7|^4 = |-7|^4 ; |7|^6 = |-7|^6$ и $a^4 + b^6 = 7$ няма решение в $\mathbb{Z}$

$\{7\}$ не е определимо, тъй като $R(x) = \begin{cases} x, & |x| \neq 7 \\ -x, & |x| = 7 \end{cases}$ е автоморфизъм и не запазва $\{7\}$

Изпълнимост

$A, v \models \varphi$ → ф-лата φ е изпълнима

$A, v \models \Sigma$ → множеството от формули Σ е изпълнимо (всяка $\varphi \in \Sigma$ е изп.)

<u>Зад. 1</u>

$$\begin{cases} \forall x \neg p(x,x) & (1) \\ \forall x \exists y\, p(x,y) & (2) \\ \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) & (3) \end{cases} \Bigg\} (*)$$

Да се намери модел за $(*)$. Има ли краен модел за $(*)$?

<u>Решение:</u>

$(\mathbb{Z}, <)$ е краен модел за $(*)$

Няма крайни модели за $(*)$, тъй като секвенциалността (св (2)) изисква „цикличност" в крайна структура, която противоречи на свойства (1) и (3).

Допускаме, че има модел за $(*)$ с краен универсум.

Нека $||A|| = n$ и $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq A$. От принципа на Дирихле следва, че съществуват $i, j \in \{0, \dots, n\}: x_i = x_j$. От (3) $x_i = x_i$, което противоречи на (1).

<u>Задача 2</u>

$p_1(x), \dots, p_n(x)$ са едноместни предикатни символи в структура без равенство и Σ е изпълнимо множество. Да се докаже, че Σ има краен модел.

<u>Д-во</u> Нека $\sim \subseteq |A| \times |A|$: $a \sim b$ iff $p_k(a) = p_k(b)$ за $k = 1, \dots, n$.

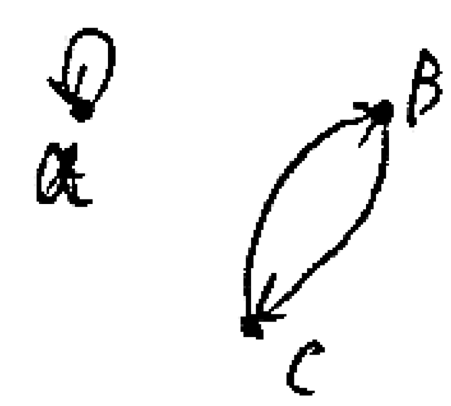
Класовете на еквивалентност в $|A| \setminus \sim$ са $\leq 2^n$. Достатъчно е да вземем по един представител на всеки от класовете на еквивалентност от $|A| \setminus \sim$, за да получим краен модел $\square$

Зад. 3

$$\exists x \exists y (p(x,x) \,\&\, \neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x)) \qquad (1)$$
$$\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) \qquad (2)$$
$$\forall x \exists y \, p(x,y) \qquad (3)$$
$$\exists x \exists y (p(x,y) \,\&\, p(y,x)) \qquad (4)$$

Да се докаже, че (1) - (4) има модел

Д-во



$$\left.\begin{array}{l} |A| = \{a, b, c\} \\ p^A = \{(a,a), (b,c), (c,b)\} \end{array}\right\} \text{модел за } (1) - (4)$$

$\square$

12.11.2018

Зад. 1 ~~[illegible]~~ $(\mathbb{N}, p)$

$(a,b,c) \in p^A$ iff $ab+1=c^2$

Да се определят $\{(a,b) : a=b\}$ и $\{2\}$

Решение

$\varphi_=(a,b) := \forall x \forall y (p(a,x,y) \Leftrightarrow p(b,x,y))$

$\varphi_{0,1}(a,b) := \forall x\, p(a,x,b)$

$\varphi_0(a) := \exists b\, \varphi_{0,1}(a,b)$

$\varphi_1(b) := \exists a\, \varphi_{0,1}(a,b)$

$\varphi_2(a) := \forall x \forall y (p(x,y,a) \Rightarrow (\varphi_1(x) \vee \varphi_1(y))) \,\&\, \exists x \exists y\, p(x,y,a)$

Зад. 2 $(\mathbb{N}, p)$

$(a,b) \in p^A$ iff броя прости делители на $a \geq$ броя прости делители на b

Да се определят множествата $\{0\}, \{1\}$ и да се докаже, че $\{2018\}$ не е определимо.

Решение

$\varphi_0(a) := \forall b\, p(a,b)$

$\varphi_1(b) := \forall a\, p(a,b)$

Ще използваме автоморфизма $h(p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}) = p^{\alpha_2} p^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$,

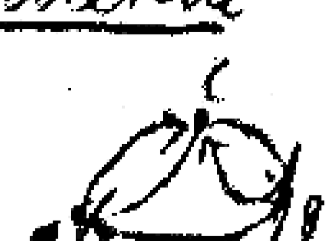
за да разменим степените на 2 и 3 в разлагането на 2018 на прости числа
прости множители (т.е. 2^1 и $3^0 \leftrightarrow 2^0$ и 3^1)

Зад. 3

$$\left.\begin{array}{|ll} \forall x\, \neg p(x,x) & (1) \\ \forall x \exists y (p(x,y) \vee p(y,x)) & (2) \\ \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y))) & (3) \\ \forall x \exists y\, \neg p(x,y) & (4) \end{array}\right\} (*)$$

Докажете, че $(*)$ е изпълнимо

Решение (4) $\models\!\!\!\!\!\dashv \exists x \forall y (p(x,y) \vee x=x)$



$|A| = \{a,b,c\}$; $p^A = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}$ е модел за $(*)$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ също е модел за $(*)$

Зад. 4
$$\begin{cases} \forall x(p(x)\Rightarrow \forall y\, p(y)) & (1)\\ \forall x\forall y(q(x,y)\lor \neg q(x,x)) & (2)\\ \exists x\, q(x,x) & (3)\\ \exists x\forall y\neg q(x,y) & (4)\\ \forall x\forall y\forall z((p(z)\Leftrightarrow q(x,y))\Leftrightarrow r(x,y,z)) & (5)\end{cases}$$

Да се провери дали множеството от ф-ли (1)-(5) е изпълнимо.

Решение $(2) \models\!\dashv \forall x\forall y(q(x,x)\Rightarrow q(x,y))$

Възможности за p: $\emptyset$ или $|A|$, т.е. $p^A=\{0,1\}$

q: $0\to 1$, т.е. $q^A=\{(0,1),(0,0)\}$

$r(x,y,z) := p(z)\Leftrightarrow q(x,y)$, т.е. $r^A=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$

Зад. 5
$$\begin{cases} \forall x\neg p(x,x,x) & (1)\\ \forall x\exists y\, p(x,y,x) & (2)\\ \neg\exists x\forall y\, p(x,y,x) & (3)\end{cases}$$

Докажете, че (1)-(3) ~~[illegible]~~ е изпълнимо

Решение Трансформираме (1),(2) и (3) с $q(x,y) := p(x,y,x)$:
$$\begin{cases} \forall x\neg q(x,x) & \\ \forall x\exists y\, q(x,y) & (2^*)\\ \neg\exists x\forall y\, q(x,y) & (3^*)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A|=\{0,1\}\\ q^A=\{(0,1),(1,0)\}\Rightarrow p^A=\{(0,1,0),(1,0,1)\}\end{array}\right\}\text{ модел за (1)-(3)}$$

Друг модел е $a\land b\subsetneq c$ iff $(a,b,c)\in p^A$ с универсум $|A|=\{(p,q) : p,q\in\mathbb{N}\}$

Zag. 6 (za gau.)

$$\begin{array}{|l}
\exists x(f(x,y) \doteq y \,\&\, f(y\,x) \doteq y) \\
\forall x \forall y \forall z\,(f(f(x,y),z) \doteq f(x,f(y,z))) \\
\exists x \exists y \neg f(x,y) \doteq f(y,x)
\end{array}$$

19.11.2018

Пролог

$p(X,Y)$ - X е родител на Y

$q(X,Y) := \exists z(p(z,X) \& p(Y,z))$ - X е правнук на Y

$sib(X,Y) := \exists z(p(z,X) \& p(z,Y))$ - X и Y са брат / сестра

Не можем да изразим с крайна формула, че X е потомък на Y

Клаузи в Пролог

1) Факти

$p(T_1, \dots, T_n).$

p(ivan, maria) → константи (0-местен функционален символ)

p(maria, hristo)

2) Правила

$p(\dots) :- p_1(\dots), p_2(\dots), \dots, p_n(\dots).$

p е конюнкция на $p_1 - p_n$

3) Цели

$?- p_1(\dots), p_2(\dots), \dots, p_n(\dots).$

$q(X,Y) :- p(Z,X), p(Y,Z)$

Съществува Z, такова че $p(Z,X)$ и $p(Y,Z)$

$$\left.\begin{array}{l} s(X,Y) :- p(Y,X) \\ s(X,Y) :- s(Z,Y), p(Z,X) \text{ - зацикляне, понеже формулите се проверяват отляво на дясно} \\ s(X,Y) :- p(Z,X), s(Z,Y) \end{array}\right\} \text{X е потомък на Y}$$

?- s(hristo, maria) } получаваме булева стойност, напр. „да".
?- s(hristo, ivan) } Ще използваме И / Л (истина / лъжа)

?- s(X, maria), write(X) - „намери прародител на maria и го изведи"

?- s(X,Y), write(X), nl, write(Y), nl, nl, fail

„намери X и Y, така че X е потомък за Y, изведи ги и върни стойност ‚лъжа"

Списък:

```
empty.
list(H,T).
add(X,L,list(X,L)).
member(X,list(X,T)).
member(X,list(H,T)):- member(X,T).
```

[1,2,3] тогава ще се запише като list(1,list(2,list(3,empty)))
С вградена в Пролог функционалност, можем да използваме

[ ] - празен списък

[H|T] - Head/Tail

[1|[2|[3|[]]]].

със синтактична захар: [1,2,3].

```
member(X,[X|_]).
member(X,[_|T]):- member(X,T).
```

Зад.1 Имплементирайте first, second, last, append, member, infix.

```
first(X,[X|_]).
second(X,[_|[X|_]]).    или    second(X,[_,S|_])
last(X,[X|[]]).
last(X,[_|T]):- last(X,T).
```

Можем да заменим [X|[]] с [X].

```
append([],B,B).
append([H|A],B,[H|C]):- append(A,B,C).
```

member(X,L):- append(A,[X|B],L). ← можем да заменим A и B с _

last(S,L):- append(_,[S],L).

infix(X,L):- append(D,B,L), append(A,X,D)

Зад.2 Имплементирайте remove чрез append и без append

remove(X,L,N):- append(A,[X|B],L), append(A,B,N)

remove(X,[X|L],L).
remove(X,[H|L],[H|N]):- remove(X,L,N). } без append

Зад.3 insert, който добавя X на произволно място в L.

insert(X,L,N):- remove(X,N,L)

26.11.2018

Зад. 1 Да се дефинира perm(P,L)

Решение:
```
perm([],[]).
perm([H|P],L):- remove(H,L,A), perm(P,A).
```

Заб. Prolog ще намери пермутациите на P в лексикографски ред, напр. при ?-perm(P,[1,2,3]).

Друго решение на задачата е
```
perm(P,[H|L]) :- perm(A,L), insert(H,A,P).
```

Зад. 2 Да се дефинира sorted(L) чрез less(X,Y):-X<Y.

Решение
```
sorted([]).
sorted([H,M|T]):- less(H,M), sorted([M|T]).
sorted([_]).
```

Алтернативно,
```
sorted(L):- not(append(_,[A,B|_],L), not(less(A,B)))
```

---

cut, !
```
p:- a,!,b.
p:- c.
?-p.
```
Ако a е истина, то p е истина

Ако a е лъжа, то се проверява c.

иначе се пропуска !(cut) и се проверява b:

Ако b е истина, то p е истина

Ако b е лъжа, не можем да се „върнем" преди ! и p остава лъжа.

```
not(A):- call(A),!, fail.
not(A).
```

Зад.3 Да се дефинират предикатите:

$P_1(X,Y)$:= Има елемент на X, който е в елемент на Y

$P_2(X,Y)$:= Има елемент на X, който е във всеки елемент на Y

$P_3(X,Y)$:= Всеки елемент на X е в елемент на Y

$P_4(X,Y)$:= Всеки елемент на X е във всеки елемент на Y

Решение:

```
P1(X,Y):- member(A,X), member(B,Y), member(A,B).
P2(X,Y):- member(A,X), not(member(B,Y), not(member(A,B))).
P3(X,Y):- not(member(A,X), not(member(B,Y), member(A,B))).
P4(X,Y):- not(member(A,X), member(B,Y), not(A,B)).
```

Зад.4 Да се намери най-малкият елемент на списък

Решение: `min(M,L):- not(member(A,L), less(A,M))`

Алтернативно,

```
min(M,[M]).
min(M,[H|T]):- min(N,T), min2(M,H,N).
min2(A,A,B):- less(A,B)
min2(B,A,B):- not(less(A,B))
```

За min2 можем да използваме cut:

```
min2(A,A,B):- less(A,B),!.
min2(B,A,B).
```

03.12.2018

Зад.1
```
ssort([],[]).
ssort([M,S],L) :- min(M,L), remove(M,L,N), ssort(S,N).
```

Зад.2 Quicksort
```
split([],X,[],[]).
split([H|T],X,[H|A],B):- less(H,X), split(T,X,A,B).
split([H|T],X,A,[H|B]):- not(less(H,X)), split(T,X,A,B).
qsort([],[]).
qsort(S,[X,L]):- qsort(SA,A), qsort(SB,B), append(SA,[X|SB],S).
```

Зад.3 tsort - сортировка с двоично дърво
```
tsort(S,L):- makeTree(L,T), ltr(T,S).  % „ltr" - left to right
makeTree([],e).  % „e" е празен списък
makeTree([H|L],T):- makeTree(L,T1), add(H,T1,T).
add(X,e,t(e,X,e)).  % „t" е наредената тройка „ляво поддърво",
„корен", „дясно поддърво".
add(X,t(L,T,R),t(NL,T,R)):- less(X,T), add(X,L,NL).
add(X,t(L,T,R),t(L,T,NR)):- not(less(X,T)), add(X,R,NR).
ltr(e,[]).
ltr(t(L,T,R),S):- ltr(L,SL), ltr(R,SR), append(SL,[T|SR],S).
```

Зад.4 subset с два списъка

```
                                    безкраен брой A.
subset([],A).
Subset([H|T],A):- member(H,A), subset(L,A).
                  краен брой A
```

По-добре е:
```
subset([H|T],A):- subset(L,A), member(H,A).
```

Алтернативно: subset([],A).
subset([H|T],A):- remove(H,A,B), subset(T,B).

или
subset([],[]).
subset(S,[H|A]):- subset(S,A).
subset([H|S],[H|A]):- subset(S,A).
} зависи от реда на елементите.

или
subset([],A).
subset([H|S],A):- append(_,[H|B],A), subset(S,B).
} също зависи от наредбата

„X is Y+Z": Ако Y или Z нямат стойност, ~~ако~~ изразът се оценява до Λ.
Ако X няма стойност, X придобива стойността Y+Z. и връща И
Ако X има стойност, то клаузата има стойност И или Λ в зависимост от това дали X=Y+Z.

<u>Зад.5</u> Да се намери дължината на списък.
length(0,[]).
length(N,[H|T]):- length(M,T), N is M+1.

<u>Зад.6</u> Да се намери сумата на списък.
sum(0,[]).
sum(N,[H|T]):- sum(M,T), N is M+H.

Редица от естествени числа:
0, 1, 2, 3, 4, ...
1, 3, 5, 7, 9, ...
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

<u>Зад.7</u> Да се дефинира редицата от естествените числа
n(0).
n(X):- n(Y), X is Y+1.

Зад. 8 Да се дефинира $\mathbb{Z}$

Въвеждаме наредбата 0, 1, -1, ..., n, -n, ...

$z(X)$:- $n(Y)$, $\underbrace{member(Z,[1,-1])}_{\text{може да се замени с } s(Z)\text{, където}}$, X is Y + Z.

s(1).
s(-1).

10.12.2018

Зад. 1 Да се дефинира с едноместен предикат редицата на фибоначи

Решение

```
f(X) :- f(X,_).
f(0,1).
f(B,C) :- f(A,B), C is A+B.
```

Зад. 2 Да се дефинира редицата $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+3} = a_n + a_{n+1}$.

Решение

```
f(X) :- f(X,_,_).
f(1,1,1).
f(Y,Z,T) :- f(X,Y,Z), T is X+Y.
```

Зад. 3 Да се дефинира n100(X), който да удовлетворява само първите 100 естествени числа

Решение

```
n100(X) :- between(X,0,99).
between(A,A,B) :- A =< B.
between(X,A,B) :- A < B, A1 is A+1, between(X,A1,B).
```

Зад. 4 Да се дефинират двойките естествени числа

Решение

```
n(X,Y) :- n(S), between(X,0,S), Y is S-X.
```

Зад. 5 member(X,N,L) – X е N-тият елемент на L

Решение

```
member(X,0,[X,_]).
member(X,N,[_,T]) :- M is N-1, member(X,M,T).
```

```
?- member(1,X,[0,1,2]).
```

ще се провали в случая

Затова ще заменим втората клауза с

```
member(X,N,[_,T]) :- member(X,M,T), N is M+1.
```

Зад. 6 reverse за списъци

Решение

```
reverse([],[]).
reverse([H|L], R):-
    reverse(L, RL),
    append(RL, [H], R).
```

или

```
reverse(L, [H|R]):-
    append(A, [H], L),
    reverse(A, R).
```

Но това решение е $O(n^2)$. Затова ще използваме

```
r(S, [], S).
r(S, [H|L], R):- r([H|S], L, R).
reverse(L, R):- r([], L, R).
```

Зад. 7 listN, който да е изпълнен за списъци от естествени числа

Решение

```
listN(L):- n(N,M), listN(N,M,L).
list(0,M,[]).
list(N,M,[H|L]):- N>0, between(H,0,M), N1 is N-1,
                  listN(N1,M,L).
```

Алтернативно,

```
list(0,0,[]).
list(N,M,[H|L]) :- N>0, between(H,0,M), N1 is N-1,
                   M1 is M-H, listN(N1,M1,L).
```

Зад. 8 * [] е двоично дърво

* [A,B] е двоично дърво, ако A и B са двоични дървета

Да се дефинира едноместен предикат, който да генерира всички двоични дървета.

19.12.2018

Зад.1 (зад 8 от миналия път)
* [] е двоично дърво
* [A,B] е двоично дърво ако A и B са двоични дървета

Решение

```
t(0,[]).
t(N,[A,B]):- N>0, N1 is N-1, between(C,0,N1), D is N1-C, t(C,A),
                                                          t(D,B).
```

Зад.2
* [] е дърво
* списък от дървета е дърво

Решение Аналогично на зад.1, но [A,B] е заменено с [A|B]

```
t(0,[]).
t(N,[H|T]):- N1 is N-1, between(C,0,N1), D is N1-C, t(C,A), t(D,B).
```

Зад.3 Да се дефинира шестместен предикат, чиито аргументи са координати на ~~[illegible]~~ върхове на правоъгълен триъгълник.

Решение

~~[illegible]~~ list генерира всички списъци от естествени числа с дължина N и сума S.

```
list([],0,0).
list([H|T],N,S):-
   N>0
   N1 is N-1,
   between(H,0,S),
   S1 is S-H,
   list(T,N1,S1).

p(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3):-
   n(S),
   list(L,6,S),
   (X2-X1)*(X3-X1) + (Y2-Y1)*(Y3-Y1) =:= 0.
```

<u>Зад.4</u> p(X,Y) ако X и Y имат еднакви прости делители

<u>Решение</u>

```
prime(X):-
  X > 1,
  X1 is X-1,
  not(between(Y,2,X1), d(Y,X)).

divgen(X,D):-
  between(D,2,X),
  d(D,X),
  prime(D).

d(X,Y):- Y mod X =:= 0.

psubset(X,Y) :- not(divgen(X,D),not(d(D,Y))).

p(X,Y) :- psubset(X,Y),psubset(Y,X).
```

<u>Зад.5</u> d(D,L), където L е списък от списъци, а D е декартовото им произведение

<u>Решение</u>

```
d([],[]).
d([DH|DT],[LH,LT]):-
  member(DH,LH),
  d(DT,LT).
```

<u>Зад.6</u> $p(\underbrace{X,Y}_{\text{център на кръг}},\overset{\text{радиус}}{R},\underbrace{A,B}_{\text{точка в кръга}})$

<u>Решение</u> dist(X,Y,A,B,D):- D is (X-A)*(X-A)+(Y-B)*(Y-B). (D — разстоянието на квадрат)

```
p(X,Y,R,A,B):- dist(X,Y,A,B,D), D < R*R.
```

За да „генерираме" в (A,B) целочислените точки в кръга, ще изписваме

```
p(X,Y,R,A,B):- XR1 is X-R, XR2 is X+R, YR1 is Y-R, YR2 is Y+R,
    between(A,XR1,XR2),
    between(B,YR1,YR2).
```

<u>Зад.7</u> Една матрица се представя като списък на редовете. tr(A,T) я транспонира.

<u>Решение</u>

матрица

```
trline([[]|_],[],[]).
```

опашки на редовете

глави на редовете

```
trline([[H|T]|M],[H|L],[T|LT]) :-
    trline(M,L,LT).
tr([],[]).
tr(A,[H|T]):-
    trline(A,H,B),
    tr(B,T).
```

07.01.2019 резолюция

Опр. (Пренексна нормална форма)

$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \varphi$

$Q_1, \dots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$

φ е безкванторна

$x_1, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи

Алгоритъм за ПНФ

1) Премахваме „$\Rightarrow$" чрез $A \Rightarrow B \models\!\mid \neg A \vee B$ и

„$\Leftrightarrow$" чрез $A \Leftrightarrow B \models\!\mid (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$

2) Преместваме $\neg$ до съжд. променливи чрез:

$\neg\neg A \models\!\mid A$

$\neg(A \wedge B) \models\!\mid \neg A \vee \neg B$

$\neg Q x A \models\!\mid Q^d x \neg A$

3) Изваждаме кванторите (преместваме)

Зад. 1 Вярно ли е $\varphi \& \forall x \psi \models\!\mid \forall x(\varphi \& \psi)$ при $x \notin Var^{free}(\varphi)$

Решение: Да.

Д-во Нека $\mathcal{A}, v$: $\mathcal{A} \models_v \varphi \& \forall x \psi$.

Следователно $\mathcal{A} \models_v \varphi$ и $\underbrace{\mathcal{A} \models_v \forall x \psi}_{\mathcal{A} \models_{v^x_a} \psi \text{ за всяко } a \in |\mathcal{A}|}$.

Тъй като $x \in Var^{free}(\varphi)$, то $\mathcal{A} \models_{v^x_a} \varphi$ за всяко $a \in |\mathcal{A}|$

Следователно $\mathcal{A} \models_{v^x_a} \varphi \& \psi$. За произволно $a \in |\mathcal{A}|$, след. $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \& \psi)$

Обратно, $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \& \psi)$

$a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi \& \psi$

$\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$ и $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi$

Но $x \notin Var^{free}(\varphi)$, след. $\mathcal{A} \models_v \varphi$ и $\mathcal{A} \models_v \forall x \psi$,

следователно $\mathcal{A} \models \varphi \& \forall x \psi$

□

<u>Зад. 2</u> Докажете, че $\forall x(\varphi \& \psi) \models\!\mid \forall x \varphi \& \forall x \psi$

<u>Зад. 3</u> Докажете, че $\models \forall x \varphi \Rightarrow \varphi$

<u>Зад. 4</u> Вярно ли е $\varphi \vee \forall x \psi \models\!\mid \forall x(\varphi \vee \psi)$?

<u>Решение</u> Да, но ако $x \notin Var^{free}(\varphi)$

<u>Д-во</u> $\mathcal{A} \models \varphi \vee \forall x \psi$

<u>I сл.</u> $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Нека $a \in |\mathcal{A}|$

След. $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$ и $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi \vee \psi$ и значи $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$

<u>II сл.</u> $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi$. Нека $a \in |\mathcal{A}|$.

След. $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi$ и $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi \vee \psi$ и значи $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$

Обратно, нека

$\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$

$a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi \vee \psi$

<u>I сл.</u> Същ. $a \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$, което е екв. на $\mathcal{A} \models_v \varphi$.

<u>II сл.</u> Не същ. $a \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$. Значи за всяко $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi$,

т.е. $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi$.

Значи $\mathcal{A} \models_v \varphi \vee \forall x \psi$

□

Зад. 5 Вярно ли е $\varphi \& \exists x \psi \models\!\mid \exists x(\varphi \& \psi)$ при $x \notin Var^{free}[\varphi]$

Решение Да, понеже

$$\varphi \& \exists \psi \models\!\mid \neg\neg(\varphi \& \exists \psi) \models\!\mid \neg(\neg\varphi \vee \forall x \neg\psi) \overset{\text{зад.1}}{\models\!\mid} \neg(\forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \models\!\mid$$

$$\models\!\mid \exists x(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \models\!\mid \exists x(\varphi \& \psi)$$

Зад. 6 Вярно ли е $\varphi \Rightarrow \forall x \psi \models\!\mid \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$? (при $x \in Var^{free}[\varphi]$)

Решение Да, понеже $\varphi \Rightarrow \forall x \psi \models\!\mid \neg\varphi \vee \forall x \psi \underset{\text{зад.1}}{\models\!\mid} \forall x(\neg\varphi \vee \psi) \models\!\mid \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$

Зад. 7 Вярно ли е $\forall x \psi \Rightarrow \varphi \models\!\mid \forall x(\psi \Rightarrow \varphi)$ при $x \in Var^{free}[\varphi]$?

Решение Не, понеже $\forall x \psi \Rightarrow \varphi \models\!\mid \neg\forall x \psi \vee \varphi \models\!\mid \exists x \neg\psi \vee \varphi \models\!\mid$

$$\models\!\mid \exists x(\neg\psi \vee \varphi) \models\!\mid \exists x(\psi \Rightarrow \varphi) \not\models\!\mid \forall x(\psi \Rightarrow \varphi)$$

Зад. 8 Вярно ли е $\varphi \Leftrightarrow \forall x \psi \models\!\mid \forall x(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ при $x \in Var^{free}[\varphi]$?

Решение Не.

Д-во $\varphi \Leftrightarrow \forall x \psi \models\!\mid (\varphi \Rightarrow \forall x \psi) \& (\forall x \psi \Rightarrow \varphi) \models\!\mid \forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \& \exists x(\psi \Rightarrow \varphi) \models\!\mid$

$$\models\!\mid \exists x(\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \& (\psi \Rightarrow \varphi)) \models\!\mid \exists x \forall y(\varphi \Rightarrow \psi[x/y] \& \psi \Rightarrow \varphi) \not\models\!\mid \forall x(\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

Опр. (Скулемова нормална форма)

Ако $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi$, $\varphi_s = \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi[y/f(x_1, \ldots, x_n)]$

φ_s — едностъпкова скулемизация; f — нов функционален символ

(~~функция~~ ако $n = 0$, то f е нулместен функционален символ, т.е. константа)

$\varphi^s = \underbrace{\varphi_{s \ldots s}}$ ← скулемизация

m пъти, където m е броят екзистенциални квантори във φ

Опр. (Конюнктивна нормална форма)

Искаме на φ да съпоставим ψ, която е конюнкция от елементарни дизюнкции (дизюнкции от литерали).

Първите две стъпки от алгоритъма съвпадат с първите две стъпки от алгоритъмът за ПНФ

3) $\varphi \vee (\psi \& \chi) \models\!\!\mid (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$

Опр. Дизюнкт наричаме крайно множество от литерали.

Лема $L \in D_1$ и $L^\partial \in D_2$

$I \models D_1$, $I \models D_2$. Нека $D_1' = D_1 \setminus \{L\}$

$D_2' = D_2 \setminus \{L^\partial\}$

Тогава $I \models \underbrace{D_1' \cup D_2'}_{\text{резолвента}}$.

Д-во I е модел за D_1 и D_2, след. има верен литерал в D_1 или D_2. Ако $L \in D_1$ е верен, $L^\partial \in D_2$ не е верен (и обратно). Щом I е модел и за D_1, и за D_2, значи $I \models D_1' \cup D_2'$. □

Зад. 9 Да се докаже, че $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{\neg p,\neg q\}\}$ не е изпълнимо

Д-во $R_p(\{p,q\},\{\neg p,q\}) = \{q\}$

$R_p(\{\neg q,p\},\{\neg q,\neg p\}) = \{\neg q\}$

$R_q(\{q\},\{\neg q\}) = \blacksquare$

□

14.01.2019 Предикатна резолюция

$\left\{\frac{x_1}{\tau_1}, \dots, \frac{x_n}{\tau_n}\right\}$ - субституция

$x_i \neq \tau_i$

Ако $x_i = x_j$, то $\tau_i = \tau_j$

Едновременна замяна: $f(x,y)$ със субституция $\left\{\frac{x}{g(y)}, \frac{y}{5}\right\}$ дава $f(g(y),5)$

$$\begin{array}{ccc} D_1\sigma_1 & & D_2\sigma_2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & R(D_1\sigma_1, D_2\sigma_2) & \end{array}$$

Ако $D_1 = \{p(x), r(f(x))\}$
$D_2 = \{\neg p(f(c)), q(c)\}$,

то със субституция $\left\{\frac{x}{f(c)}\right\}$ в D_1 получаваме резолвентата $R_{f(c)}(\{p(f(c)), r(f(f(c)))\}, \{\neg p(f(c)), q(c)\}) =$

$= \{r(f(f(c))), q(c)\}$

Зад.1 1. Някои пациенти уважават докторите
2. Никой пациент не уважава шарлатаните

Извод: 3. Докторите не са шарлатани

Решение Предикати: $п(x)$ - пациент
$д(x)$ - доктор
$ш(x)$ - шарлатанин
$ув(x,y)$ - уважение

1. $\exists x(n(x) \& \forall y(g(y) \Rightarrow yb(x,y)))$

2. $\forall x(n(x) \Rightarrow \forall y(m(y) \Rightarrow \neg yb(x,y)))$

$\neg$3. $\exists x(g(x) \& m(x))$

Превръщаме в ПНФ:

1. $\exists x \forall y(n(x) \& (\neg g(y) \vee yb(x,y)))$

2. $\forall x \forall y(\neg n(x) \vee (\neg m(y) \vee \neg yb(x,y)))$

$\neg$3. $\exists x(g(x) \& m(x))$ (запазва се)

Превръщаме в СНФ:

1. $\forall y(n(d) \& (\neg g(d) \vee yb(d,y))$ за нова константа d

2. $\forall x \forall y(\neg n(x) \vee \neg m(y) \vee \neg yb(x,y))$ (запазва се)

$\neg$3. $g(c) \& m(c)$ за нова константа c

Формулите са вече в КНФ. Имаме следните дизюнкти:

1. $\overset{D_1}{\{n(d)\}}, \overset{D_2}{\{\neg g(d) \vee yb(d,y)\}}$

2. $\overset{D_3}{\{\neg n(x), \neg m(y), \neg yb(x,y)\}}$

3. $\overset{D_4}{\{g(c)\}}, \overset{D_5}{\{m(c)\}}$

Резолюция:

$R(D_4, D_2[y/c]) = \overset{D_6}{\{yb(d,c)\}}$

$R(D_5, D_3[y/c]) = \overset{D_7}{\{\neg n(x), \neg yb(x,c)\}}$

$R(D_1, D_7[x/d]) = \overset{D_8}{\{\neg yb(d,c)\}}$

$R(D_6, D_8) = \blacksquare$

Значи $\{1, 2\} \models 3$

Зад.2

1. Митничарите обискират всеки, който преминава границата и не е дипломат.

2. Има трафиканти, които са преминали границата и са обискирани само от трафиканти

3. Дипломатите не са трафиканти

Извод: 4. Има митничари, които са трафиканти

Решение: Предикати: $m(x)$ - митничар

$T(x)$ - трафикант

$n(x)$ - преминал границата

$g(x)$ - дипломат

$o(x,y)$ - обискиран

1. $\forall x((\neg g(x) \& n(x)) \Rightarrow \exists y(m(y) \& o(y,x)))$

2. $\exists x(T(x) \& n(x) \& \forall y(o(y,x) \Rightarrow T(y)))$

3. $\forall x(g(x) \Rightarrow \neg T(x))$

4. $\exists x(m(x) \& T(x))$

¬4. $\forall x(\neg m(x) \vee \neg T(x))$

ПНФ:

1. $\forall x \exists y(g(x) \vee \neg n(x) \vee (m(y) \& o(y,x)))$

2. $\exists x \forall y(T(x) \& n(x) \& (\neg o(y,x) \vee T(y)))$

3. $\forall x(\neg g(x) \vee \neg T(x))$

¬4. $\forall x(\neg m(x) \vee \neg T(x))$ (запазва се)

СНФ: 1. $\forall x(g(x) \vee \neg n(x) \vee (m(f(x)) \& o(f(x),x)))$ за нов ф.с. f

2. $\forall y(T(c) \& n(c) \& (\neg o(y,c) \vee T(y)))$ за нова константа c

3 и ¬4 се запазват

Преработваме 1, за да бъде в КНФ, посредством $\varphi\vee(\psi\&\chi) \models (\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$

1. $\forall x((g(x) \vee \neg n(x) \vee m(f(x))) \& (g(x) \vee \neg n(x) \vee o(f(x),x)))$

От 1. $\mathcal{D}_1 = \{g(x), \neg n(x), m(f(x))\}$

$\mathcal{D}_2 = \{g(x), \neg n(x), o(f(x),x)\}$

От 2. $\mathcal{D}_3 = \{\tau(c)\}$

$\mathcal{D}_4 = \{n(c)\}$

$\mathcal{D}_5 = \{\neg o(y,c), \tau(y)\}$

От 3. $\mathcal{D}_6 = \{\neg g(x), \neg\tau(x)\}$

От 4. $\mathcal{D}_7 = \{\neg m(x), \neg\tau(x)\}$

$R(\mathcal{D}_2[x/c], \mathcal{D}_4) = \{g(c), o(f(c),c)\} =: \mathcal{D}_8$

$R(\mathcal{D}_1[x/c], \mathcal{D}_4) = \{g(c), m(f(c))\} =: \mathcal{D}_9$

$R(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_6[x/c]) = \{\neg g(c)\} =: \mathcal{D}_{10}$

$R(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_7[x/c]) = \{\neg m(c)\} =: \mathcal{D}_{11}$

$R(\mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{10}) = \{m(f(c))\} =: \mathcal{D}_{12}$

$R(\mathcal{D}_8, \mathcal{D}_{10}) = \{o(f(c),c)\} =: \mathcal{D}_{13}$

$R(\mathcal{D}_5[y/f(c)], \mathcal{D}_{13}) = \{\tau(f(c))\} =: \mathcal{D}_{14}$

$R(\mathcal{D}_6[x/f(c)], \mathcal{D}_{14}) = \{\neg g(f(c))\} =: \mathcal{D}_{15}$

$\mathcal{D}(\mathcal{D}_7[x/f(c)], \mathcal{D}_{14}) = \{\neg m(f(c))\} =: \mathcal{D}_{16}$

$\mathcal{D}(\mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{16}) = \blacksquare$